Exercice n° 1

- $a = 3 - 4i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) = 3 \\ x^2 + y^2 = |a| = 5 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \mp 1$

D'où les racines carrées de $3 - 4i$ sont :

$b_0 = 2 - i$ et $b_1 = -2 + i$

- $a = 2i$

On a : $(1 + i)^2 = 2i$ par suite les racines carrées de $2i$ sont : $b_0 = 1 + i$ et $b_1 = -1 - i$

- $a = -5 - 12i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$

D'où les racines carrées de $(-5 - 12i)$ sont :

$b_0 = 2 - 3i$ et $b_1 = -2 + 3i$

- $a = \dfrac{2i - 1}{i + 2}$

Déterminons l'écriture algébrique de a :

$$a = \frac{2i-1}{i+2} = \frac{(2i-1).(-i+2)}{5} = \frac{2+4i+i-2}{5} = i$$

Or on a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où les racines carrées de a sont

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où les racines carrées de a sont : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où les racines carrées de a sont :

$\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Exercice n° 2

- $a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 8$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 8$ Signifie $r = 2$

Donc on aura :

$\underline{k=0}$: $Z_0 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

$\underline{k=1}$: $Z_1 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$

$\underline{k=2}$: $Z_2 = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

- $a = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2$ Signifie $r = \sqrt[3]{2}$ (voir analyse)

Donc on aura :

$\underline{k=0}$: $Z_0 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{18}}$

$\underline{k=1}$: $Z_1 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{18}}$

$\underline{k=2}$: $Z_2 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{25\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{18}}$

- $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 1$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 1$ Signifie $r = 1$

Donc on aura :

$\underline{k=0}$: $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$\underline{k=1}$: $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$\underline{k=2}$: $Z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Exercice n° 3

a) On a : $(2 - i)^3 = 2^3 - 3x\,2^2x\,i + 3x2x\,i^2 - i^3$

$= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$\boxed{(2 - i)^3 = 2 - 11i}$

Donc $2 - i$ est une racine cubique de $2 - 11i$

b) soit z tel que : $z^3 = 2 - 11i$

Or $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ d'où $\dfrac{z^3}{(2-i)^3} = 1$ **(E)**

On posons $Z = \dfrac{z}{2 - i}$ l'équation **(E)**

Devienne $Z^3 = 1$ **(E')**

Z_0, Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation (E') sont les racines cubiques de l'unité soit donc :

$Z_0 = 1, Z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

Il en résulte que z_0 , z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) vérifient :

* $\frac{z_0}{2-i} = Z_0 = 1 \Rightarrow \boxed{z_0 = 2 - i}$

* $\frac{z_1}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_1 = (2-i)Z_1 = (2-i).(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow z_1 = -1 + i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_1 = (-1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2} + \sqrt{3})}$

* $\frac{z_2}{2-i} = Z_1 \Rightarrow z_2 = (2-i)Z_2 = (2-i).(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

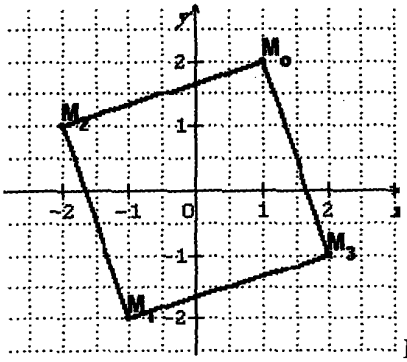
$\Rightarrow z_2 = -1 - i\sqrt{3} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\boxed{z_2 = (-1-\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2} - \sqrt{3})}$

Exercice n° 4

a) Un travail analogue à celui fait à l'ex 1 donne :
les racines carrées de $-7-24i$ sont :
$3-4i$ et $-3+4i$
les racines carrées de $3-4i$ sont : $2-i$ et $-2+i$
les racines carrées de $-3+4i$ sont : $1+2i$ et $-1-2i$
Donc **Les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont :**
$1+2i$; $-1-2i$; $-2+i$ et $2-i$

b) Soient M_0 ; M_1 ; M_2 et M_3 les points d'affixes respectivement z_0, z_1, z_2 et z_3



$M_0M_2M_1M_3$ carré

Exercice n° 5

a) $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$

$\Delta = (3+2i)^2 - 4(5+i) = 9+12i-4-20-4i = -15+8i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-15 & (1) \\ x^2+y^2=17 & (2) \\ 2xy=8 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=4$

Donc $\delta = 1+4i$ une racine carrée de Δ

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+2i+1+4i}{2} = 2+3i$$

$$Z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+2i-1-4i}{2} = 1-i$$

D'où $S_C = \{2+3i, 1-i\}$

b) $iz^2 - (4i-3)z + i - 5 = 0$

$\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -3-4i$

Soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1) \\ x^2+y^2=5 & (2) \\ 2xy=-4 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

Pour $x=1$ l'éq (3) donne $y=-2$

Donc $\delta = 1-2i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{-4i+3-1+2i}{2i} = \frac{-2i+2}{2i} = -1-i$$

$$Z'' = \frac{-4i+3+1-2i}{2i} = \frac{-6i+4}{2i} = -3-2i$$

D'où $S_C = \{-3-2i, -1-i\}$

c) $(4-3i)z^2 - (10+5i)z + 3 + 5i = 0$

$\Delta = (10+5i)^2 - 4(4-3i).(3+5i)$
$= 100+100i-25-4(27+11i) = -33+56i$

soit $\delta = x+iy$ une racine carrée de Δ

On a $|\Delta| = \sqrt{(-33)^2+56^2} = \sqrt{4225} = 65$

On aura don le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 65 \ (2) \\ 2x.y = 56 \ (3) \end{cases}$$

(1)+(2) $\Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

Pour x=4 l'éq (3) donne y= 7

D'où : $\delta = 4 + 7i$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$Z' = \frac{10+5i+4+7i}{2(4-3i)} = \frac{7+6i}{4-3i} = \frac{(7+6i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{28+21i+24i-18}{25} = \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$Z'' = \frac{10+5i-4-7i}{2(4-3i)} = \frac{3-i}{4-3i} = \frac{(3-i).(4+3i)}{4^2+3^2}$$

$$= \frac{12+9i-4i+3}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

D'où $S_C = \left\{ \frac{2}{5} + \frac{9}{5}i ; \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \right\}$

Exercice n° 6

a) $(z-2).(z^2 - 3iz + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 - 3iz + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z_0 = 2$ ou $z^2 - 3iz + 4 = 0$

- $z^2 - 3iz + 4 = 0$:

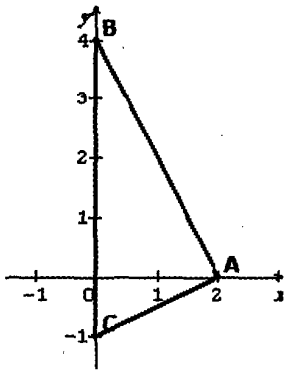
On a $\Delta = (-3i)^2 - 4 \times 4 = -9 - 16 = -25 = (5i)^2$

Donc 5i est une racine carrée de Δ d'où les solutions de l'équation $z^2 - 3iz + 4 = 0$ sont :

$$z' = \frac{3i+5i}{2} = 4i \text{ et } z'' = \frac{3i-5i}{2} = -i$$

Conclusion : $S_C = \{2, 4i, -i\}$

b) $z_A = 2$, $z_B = 4i$ et $z_C = -i$



On a : $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = 4i - 2$

$\text{aff}(\overrightarrow{AC}) = z_C - z_A = -i - 2$

$\frac{\text{aff}(\overrightarrow{AB})}{\text{aff}(\overrightarrow{AC})} = \frac{4i-2}{-i-2} = \frac{(4i-2)(i-2)}{5} = -2i$ imaginaire pure

Par suite (AB) et (AC) sont perpendiculaires d'où le triangle ABC est rectangle en A

Exercice n° 7 $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) $\Delta' = (1+i)^2 - .2i.(1+\text{tg}^2\theta)$

$= 2i - 2i - 2i\,\text{tg}^2\theta = -2i\,\text{tg}^2\theta = [(1-i)\text{tg}\,\theta]^2$

Donc $\delta = (1-i)\text{tg}\,\theta$

D'où :

$Z' = 1 + i + (1-i)\,\text{tg}\,\theta$

$Z'' = 1 + i - (1-i)\,\text{tg}\,\theta$

$S_C = \{(1+i) + (1-i)tg\theta ; (1+i) - (1-i)tg\theta\}$

a) $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$b = 1 + i\,\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

Donc $b = \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta}$ (car $\cos\theta > 0$)

b) * $Z' = (1+i)[1 + \frac{1-i}{1+i}tg\theta]$,

or $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$. Par suite on aura :

$z' = (1+i)(1-i\,\text{tg}\,\theta) \Longrightarrow Z' = a\bar{b}$

* $Z'' = (1+i)[1 - \frac{1-i}{1+i}tg\theta] = (1+i)(1+i\,\text{tg}\,\theta)$

$\Longrightarrow Z'' = ab$

c) $Z' = a\bar{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} . \frac{1}{\cos\theta}e^{-i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$Z'' = ab = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} . \frac{1}{\cos\theta}e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{4}+\theta)}$

Exercice n° 8 $\theta \in]0,\pi[$

$(E_\theta): z^2 - e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)z + e^{i3\theta} = 0$

● $\Delta = \left[e^{i\theta}(1+e^{i\theta})\right]^2 - 4e^{3i\theta}$

$= \left[e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})\right] - 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}-4e^{i\theta})$

$= e^{2i\theta}(1+e^{2i\theta}-2e^{i\theta})$

$\Delta = (e^{i\theta})^2(1-e^{i\theta})^2 = \left[e^{i\theta}(1-e^{i\theta})\right]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(1-e^{i\theta})$ D'où :

$Z' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})+e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}+1-e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z' = e^{i\theta}}$

$Z'' = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta})-e^{i\theta}(1-e^{i\theta})}{2} = \dfrac{e^{i\theta}(1+e^{i\theta}-1+e^{i\theta})}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{Z'' = e^{2i\theta}}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{e^{i\theta}, e^{2i\theta}\}$

● a) $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\theta} - 1|$

$BC = |z_C - z_B| = |e^{2i\theta} - e^{i\theta}|$

$BC = |e^{i\theta}(e^{i\theta}-1)| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1}.|e^{i\theta}-1|$

$= |e^{i\theta}-1| = AB$

Donc le triangle ABC est isocèle de sommet B

b) Calculons la distance AC :

$AC = |z_C - z_A| = |e^{2i\theta}-1| = |(e^{i\theta}+1).(e^{i\theta}-1)|$

$= |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

On sait que ABC est isocèle de sommet B d'où pour que ce triangle soit équilatérale il faut que : AB = AC

Donc ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}+1|.|e^{i\theta}-1|$

Puisque $\theta \neq 0$ alors $e^{i\theta} \neq 1$

Finalement ABC est équilatéral si et seulement si :

$|e^{i\theta}+1| = 1$

● a) $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ alors $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$ par suite

Le module de $(1 + e^{i\theta})$ est $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ et un argument de $(1 + e^{i\theta})$ est $\dfrac{\theta}{2}$

b) ABC est équilatéral si et seulement si $2\cos\dfrac{\theta}{2} = 1$

Donc $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

On aura alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or $\theta \in]0,\pi[$ Donc :

pour que ABC soit équilatéral il faut que

θ soit $\dfrac{2\pi}{3}$

Exercice n° 9

$(E): (1-i)z^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)z + 1 - i = 0$

1) On sait que dans l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ les solutions z_1 et z_2 vérifient $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

D'où on aura : $z_1 z_2 = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i).(1+i)}{1^2+1^2} = \dfrac{2i}{2} = i$

$\Rightarrow z_2 = \dfrac{i}{z_1} \Rightarrow |z_2| = \left|\dfrac{i}{z_1}\right| = \dfrac{|i|}{|z_1|} = \dfrac{1}{|z_1|}$

Et $\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(i) - \text{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arg}(z_1)$

2) a)

- $1 - \sin 2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta.\cos\theta$

$= (\cos\theta - \sin\theta)^2$

- Résolution de l'équation (E) :

$\Delta' = (\cos\theta + \sin\theta)^2 - (1+i).(1-i)$

$= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 2\sin\theta.\cos\theta - 2$

$= \sin 2\theta - 1 = -(1 - \sin 2\theta)$

$= \left[i(\cos\theta - \sin\theta)\right]^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = i(\cos\theta - \sin\theta)$ d'où on aura :

$$z_2 = \frac{\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta}{1-i}$$
$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta + i\cos\theta - i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$
$$z_1 = \frac{\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta}{1-i}$$
$$= \frac{(\cos\theta + \sin\theta - i\cos\theta + i\sin\theta)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On a $\theta \in]0, \pi[$ donc $\text{Im } z_1 > 0$

Donc $\boxed{z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } z_2 = \sin\theta + i\cos\theta}$

b) $z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \Longrightarrow z_1 = e^{i\theta}$

$$z_2 = \sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta - i\sin\theta) = ie^{-i\theta}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\theta} \Longrightarrow z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

c) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

car $\theta \in]0, \pi[$

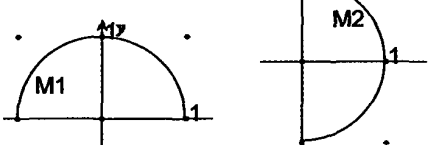
3) $\theta \in [0, \pi]$: et $\text{aff}(M_1) = e^{i\theta}$

Donc M_1 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $y \geq 0$

$\text{aff}(M_2) = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

$\theta \in [0, \pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Donc M_2 décrit le demi – cercle trigonométrique situé dans le demi plan $x \geq 0$



Exercice n° 10 $\theta \in]0, \pi[$

a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 \underset{f.Moivre}{=} \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

- Résolution de l'équation

$(E) : z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta = 0$

$\Delta' = 1 - (2\sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta$

$= \underbrace{\cos 2\theta}_{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} + \overbrace{i\sin 2\theta}^{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

Donc une racine carre de Δ' (discriminant réduit) est $\delta' = \cos\theta + i\sin\theta$ d'où on aura :

$z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\text{Im } z' = \sin\theta \geq 0$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

b) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta}$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$z'' = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 1 - e^{i\theta}$

$$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2) a) $\frac{z''}{z'} = \frac{-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$, $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$= -i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -itg\frac{\theta}{2}$$

Donc $\frac{aff(\overrightarrow{OM''})}{aff(\overrightarrow{OM'})}$ imaginaire pur ce qui prouve que le triangle OM'M" est rectangle en O

b) OM'M" est isocèle si et seulement si : OM' = OM"

$\Leftrightarrow |z'| = |z''| \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$ et $tg\frac{\theta}{2} > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

D'où $tg\frac{\theta}{2} = 1$ ce qui donne $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : OM'M" est isocèle si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$

3) $z' = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - 1 = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z' - 1| = |e^{i\theta}| = 1$ donc IM' = 1 où I est le point d'affixe 1 ce qui prouve que le point M' vari sur le cercle C de centre I et de rayon 1

Exercice n° 11

$(E) : z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i = 0$

a) Soit x un réel ,

x solution de (E) signifie

$x^3 - (6x^2 + 4ix^2) + (8+14i)x - 12i = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 - 6x^2 + 8x + i(-4x^2 + 14x - 12) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 8x = 0 (1) \\ -4x^2 + 14x - 12 = 0 (2) \end{cases}$$

On a va résoudre dans IR l'équation (2)

$-4x^2 + 14x - 12 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4\,x(-4)x(-12) = 196 - 192 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

Donc $x' = \frac{-14+2}{-8} = \frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{-14-2}{-8} = 2$

Or 2 est solution de l'équation (1) et $\frac{3}{2}$ n'est pas une solution de l'équation (1)

Conclusion : **$z_0 = 2$ est une solution réelle de (E)**

b) 2 est une solution de (E) $\Rightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i =$

$(z-2)(a.z^2 + b.z + c)$

$\Leftrightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i =$

$az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 - 4i \\ c - 2b = 8 + 14i \\ -2c = -12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 4i \\ c = 6i \end{cases}$$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z-2)(z^2 - (4+4i)z + +6i) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z - 2 = 0$ ou $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$

On va résoudre $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$ en effet :

$\Delta' = (2+2i)^2 - 6i = 4(1+i)^2 - 6\,i = 8i - 6i = 2i = (1+i)^2$

Donc $\delta = (1+i)$

Par suite $z' = 2+2i+1+i = 3+3i$

$z'' = 2+2i-1-i = 1+i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 3+3i, 1+i\}$

● $z_A = 2$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 3 + 3i$

a) Calculons les distances AB , AC et BC :

$AB = |z_B - z_A| = |1+i-2| = |-1+i| = \sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = |3+3i-2| = |1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |3+3i-1-i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

On remarque que :

$2 + 8 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 10$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B

b) Pour que ABCD soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme car ABC est rectangle en B, on aura donc :

$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(\overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow$ $z_D = z_C - z_B + z_A = 3 + 3i - 1 - i - 2 = 2i$

Donc $\boxed{z_D = 2i}$

● a) On a : $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = \frac{2iz + 3 - i - 1 - i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2iz + 2 - 2i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2i(z - 1 - i)}{z - 1 - i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) On a : $\text{Arg}\left(\frac{z' - z_B}{z - z_B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{MB}\right)$

$\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

d'où (BM') $\perp$ (BM) ce qui prouve que le triangle BMM' rectangle en B

Exercice n° 12

(E): $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0$

● a) remplaçant dans l'équation (E) z par 3i on aura :

$(3i)^3 - (6+3i)(3i)^2 + (9+12i)(3i) - 9(2+3i)$

$= -27i + 54 + 27i + 27i - 36 - 18 - 27i$

$= 54i - 54i + 54 - 54 = 0$

d'où 3i est une solution de (E)

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = (z-3i)(z^2 - 6z + 9 - 6i)$

$= z^3 - 6z^2 + 9z - 6iz - 3iz^2 + 18iz - 27i - 18$

$= z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$ donc

(E) est équivalente à l'équation $(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0$

● a) $u^2 = 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $u = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $u = -\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{3} + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right\}$

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0 \Leftrightarrow$

$(z-3i) = 0$ Ou $(z-3)^2 - 6i = 0 \Leftrightarrow$

$z = 3i$ ou $z - 3 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ *ou* $z - 3 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Par suite les solutions sont : $z_0 = 3i$, $z_1 = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

a) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |-\sqrt{3}(2+2i)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = |\sqrt{3}+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-\sqrt{3})|$$
$$= \sqrt{(3+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+6\sqrt{3}+3+3-6\sqrt{3}+9} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = |3-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)|$$
$$= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+3)^2}$$
$$= \sqrt{9-6\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

D'où $M_1M_2 = M_0M_2 = M_0M_1$ et par suite le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral

b) puisque le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral alors le centre de centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité et par suite :

$$z_I = \frac{z_0+z_1+z_2}{3} = \frac{3i+3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}$$

Donc $\boxed{z_I = 2+i}$

Exercice n° 13

$z^3+(\sqrt{3}+i)z^2+(1+i\sqrt{3})z+i=0$

$(-i)^3+(\sqrt{3}+i)(-i)^2+(1+i\sqrt{3})(-i)+i$
$= i-\sqrt{3}-i-i+\sqrt{3}+i = 0$
D'où $(-i)$ est une solution de (E)

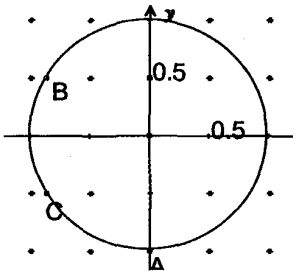
(E) est équivalente à l'équation $(z+i)[z^2+az+b]=0$
En développent et par identification on trouve
$a=\sqrt{3}$ et $b=1$
donc les solutions de (E) sont les solutions de l'équation
$(z+i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0 \Leftrightarrow$
$(z+i)=0$ Où $(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$
On va résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

$\Delta = \sqrt{3}^2-4 = -1 = i^2 \Longrightarrow \delta = i$ d'ou $z' = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

et $z'' = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-i, z', z''\}$

a) $z_A = -i$, $z_B = \frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

Donc : OB = 1 et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $C = S_{(O,\vec{i})}(B)$



b) $Z = \frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} = \frac{z_B-\overline{z_B}}{-i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,z_B}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

$Z = \frac{2i.\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}-i).\frac{1}{2}} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i}$

Donc $|Z| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = \frac{2}{2} = 1$

$\mathrm{Arg}Z \equiv Arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right)[2\pi]$
$\equiv Arg(2i)-Arg(\sqrt{3}-i)[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Conclusion : $\boxed{Z = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]}$

c) $|Z| = \left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right| = \frac{|z_B-z_C|}{|z_A-z_C|} = \frac{CB}{CA} = 1$

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal C

Exercice n° 14

$f(x) = (x)^3+2(i-\sqrt{3})(x)^2+4(1-i\sqrt{3})(x)+8i$
1) Cherchons $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(ix) = 0$, en effet :
$f(ix) = 0 \Leftrightarrow$
$(ix)^3+2(i-\sqrt{3})(ix)^2+4(1-i\sqrt{3})(ix)+8i = 0 \Leftrightarrow$
$-ix^3-2ix^2+2\sqrt{3}x^2+4ix+4\sqrt{3}x+8i = 0 \Leftrightarrow$
$2\sqrt{3}x(x+2)+i(-x^3-2x^2+4x+8) = 0$

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}(x+2) = 0 \\ -x^3-2x^2+4x+8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Donc :
$z_0 = -2i$ est une racine imaginaire pure de $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2+az+b) = 0$
$\Leftrightarrow z^3+(a+2i)z^2+(b+2ia)z+2ib = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2i = 2i-2\sqrt{3} \\ b+2ia = 4-4i\sqrt{3} \\ 2ib = 8i \end{cases} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$

D'où $f(z)=0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z+2i=0$ Ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

*Résolution de l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta' = \sqrt{3}^2-4=-1=i^2$ Donc $\delta = i$

Par suite : $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i,\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i\}$

● a) $w=\dfrac{z_1}{z_0}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i).i}{(-2i).i}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) aff$(\overrightarrow{OM})=z$

aff$(\overrightarrow{M_2M_1})=wz-w^2z=z.(w-w^2)=z(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}})$

$=z.(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=z$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_2M_1} \Longrightarrow$ OMM_1M_2 est un parallélogramme (1)

Aussi on a : $OM=|z|$

$OM_2=|wz|=|z||w|=|z|$

D'où $OM=OM_2$ (2)

(1) + (2) donne : OMM_1M_2 est un losange

Exercice n° 15 $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$(E):(1+iz)^3(1-itg\theta)=(1-iz)^3(1+itg\theta)$

● a) z solution de (E) $\Leftrightarrow$

$(1+iz)^3.(1-itg\theta)=(1-iz)^3.(1+itg\theta)$

$\Leftrightarrow |(1+iz)^3||1-itg\theta|=|(1-iz)^3||1+itg\theta|$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}=|1-iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3=|1-iz|^3 \Leftrightarrow \boxed{|1+iz|=|1-iz|}$

b) posons $z=x+iy$; $x \in IR$ et $y \in IR$

$|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow |1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$

$\Leftrightarrow |1-y+ix|=|1+y-ix|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2}$

$\Leftrightarrow (1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$

$\Leftrightarrow (1-y)^2=(1+y)^2$

$\Leftrightarrow -2y=2y \Leftrightarrow y=0$

Donc $|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z$ est réel

● a) $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\dfrac{\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$

Donc $\boxed{\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$

b) $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ [posons $z=tg\alpha$ et remplaçant z dans l'équation (E) on aura pour $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$(1+i\,tg\alpha)^3.(1-itg\theta)=(1-i\,tg\alpha)^3.(1+itg\theta)$

$\Leftrightarrow$

$(\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha})^3=\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta} \Leftrightarrow (e^{2i\alpha})^3=e^{2i\theta}$

$\Leftrightarrow e^{6i\alpha}=e^{2i\theta} \Leftrightarrow 6\alpha=2\theta+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

On sait que $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \prec -\dfrac{\theta}{3} \prec \dfrac{\pi}{6} \quad (1) \\ -\dfrac{\pi}{2} \prec \dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3} \prec \dfrac{\pi}{2} \quad (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Longrightarrow -\dfrac{2\pi}{3} \prec \dfrac{k\pi}{3} \prec \dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow -2<k<2$

D'où $k \in \{-1,0,1\}$ on a alors pour :

- $k=0 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}$
- $k=1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3}$
- $k=-1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3}$

Finalement : $S_{\mathbb{C}}=\{tg\dfrac{\theta}{3};tg(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3});tg(\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3})\}$

Exercice n° 16

● les racines cubiques de u sont les solutions de :

$z^3=u$ Or $u=4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow z_k=2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $k \in \{0,1,2\}$

Donc les racines cubiques de $4\sqrt{2}(-1+i)$ sont :

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $z_1 = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

● $\theta \in]0,\pi[$

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{[(1-\cos\theta)-i\sin\theta].[(1-\cos\theta)+i\sin\theta]}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{[1-\cos\theta]^2+[\sin\theta]^2} = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{2(1-\cos\theta)} + i\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\left[1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\right]} = \frac{1}{2} + i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{2}(1+i\cot g\frac{\theta}{2}) \ ,\theta \in]0,\pi[} \ (**)$$

● $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i).z^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2z-1}{z}\right)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i) = u$$

d'après la question 1) on aura :

$$\frac{2z-1}{z} = z_k \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-z_k}$$

D'où les solutions de l'équation (E) sont

- $z_0' = \dfrac{1}{2-z_0} = \dfrac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{4}}}$

Remplacer $\theta par \frac{\pi}{4} dans$ (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_0' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{\pi}{8})}$$

- $z_1' = \dfrac{1}{2-z_1} = \dfrac{1}{2-2e^{i\frac{11\pi}{12}}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-e^{i\frac{11\pi}{12}}}$

Remplacer $\theta par \frac{11\pi}{12} dans$ (**)

$$\Longrightarrow \boxed{z_1' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{11\pi}{24})}$$

- $z_2' = \dfrac{1}{2-z_2} = \dfrac{1}{2-2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1-e^{i\frac{19\pi}{12}}}$

Remplacer $\theta par \frac{19\pi}{12} dans$ (**)

$$\Longrightarrow z_2' = \frac{1}{4}(1+i\cot g\frac{19\pi}{24})$$

Exercice n° 17

: rectifier $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

● a) $\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3})$, on a

- $|1+i| = \sqrt{2}$

Soit θ un argument de 1 + i : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ Par suite $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$$1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc $\lambda = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$

$$\Longrightarrow \lambda = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})}$$

b) Déterminons l'écriture cartésienne de λ :

$$\lambda = (1+i)(1+i\sqrt{3}) = 1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}$$

$$\lambda = 1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$$

Donc $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

● • $z^3 = a \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Leftrightarrow z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})} \text{ avec } r^3 = 2\sqrt{2}$$

et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie r =

Donc les racines cubiques de a sont :

$z_0 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

• $z^3 = \bar{a} \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow z_k' = r\, e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $k \in \{0,1,2\}$

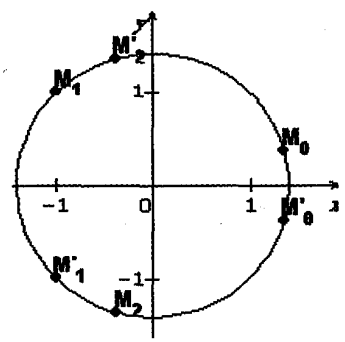
On a : $r^3 = 2\sqrt{2}$ Signifie $r = \sqrt{2}$

Donc les racines cubiques de $\bar{a}$ sont :

$z_0' = \overline{z_0} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z_1' = \overline{z_1} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

et $z_2' = \overline{z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

• Construction des points M_0, M_1 ,M_2 ,M_0',M_1' et M_2' affixes des solutions trouvées :



● $P(z) = z^6 - 4z^3 + 8$

a) z_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \rho(z_0) = {z_0}^6 - 4{z_0}^3 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \overline{{z_0}^6 - 4{z_0}^3 + 8 = 0} \Leftrightarrow \overline{z_0}^6 - 4\overline{z_0}^3 + 8 = 0$

Donc $\overline{z_0}$ est une solution de (E)

b) Posons $Z = z^3$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 4Z + 8 = 0 \\ Z = z^3 \end{cases}$$

Résolution de : $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

$\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \Longrightarrow \delta = 2i$

D'où $Z' = 2 + 2i$ ou $Z'' = 2 - 2i$

Ce qui donne : $z^3 = 2 + 2i = a$ ou bien $z^3 = 2 - 2i = \bar{a}$

D'après la question 2)

$$S_C = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right\}$$

4) On a :

$(z - z_0).(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0\overline{z_0}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_0)z + |z_0|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2$

De même :

$(z - z_1).(z - \overline{z_1}) = z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1\overline{z_1}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_1)z + |z_1|^2$

$= z^2 + 2z + 2$

$(z - z_2).(z - \overline{z_2}) = z^2 - (z_2 + \overline{z_2})z + z_2\overline{z_2}$

$= z^2 - (2\mathrm{Re}z_2)z + |z_2|^2$

$= z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\frac{7\pi}{12}).z + 2$

$= z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2$

P(z) =

$(z - z_0).(z - \overline{z_0})(z - z_1).(z - \overline{z_1})(z - z_2).(z - \overline{z_2})$

$= (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)(z^2 + 2z + 2)(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

$P(z) = (z^2 - (1+\sqrt{3})z + 2)(z^2 + 2z + 2)(z^2 - (1-\sqrt{3})z + 2)$

Exercice n° 18 $\theta \in [-\pi, \pi[$

(E) : $iz^2 + (2\sin\theta)z - 2i(1 + \cos\theta) = 0$

● a) **rectifier** $\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

On a $\forall\ \theta \in [-\pi, \pi[$:

$\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = 1 - \cos^2\theta - 2 - 2\cos\theta$

$= -\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1$

$= -(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1)$

$= -(1 + \cos\theta)^2$

b) Résolution de l'équation (E)

$\Delta' = \sin^2\theta - (-2i)i(1 + \cos\theta)$

$= \sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) = -(1 + \cos\theta)^2$

$\Rightarrow \delta' = i(1 + \cos\theta)$

D'où $z' = \dfrac{-\sin\theta + i(1+\cos\theta)}{i} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

$z'' = \dfrac{-\sin\theta - i(1+\cos\theta)}{i} = -1 - \cos\theta + i\sin\theta$

● a)

$-\overline{z'} = -\left[\overline{(1+\cos\theta) + i\sin\theta}\right] = -\left[(1+\cos\theta) - i\sin\theta\right]$

$= -(1+\cos\theta) + i\sin\theta = z''$

Par suite aff (M") = - $\overline{\text{aff (M')}}$: donc M' et M" sont symétrique par rapport à la droite des ordonnées $(O, \vec{v})$

b)

* $z' = 1+\cos\theta+i\sin\theta = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos(\frac{\theta}{2})$

puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où

$$\boxed{z' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

(Pour $\theta = -\pi$: $z' = 0$)

* $\forall\ \theta \in]-\pi,\pi[$:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{-\overline{z'}}{z'} = \frac{-2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$$

c)

- $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|e^{i(\pi-\theta)}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|z''|}{|z'|} = \frac{OM''}{OM'} = 1 \Leftrightarrow$ OM" = OM' ce qui prouve que le triangle OM'M" est isocèle en O

- le triangle OM'M" est équilatéral

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM''},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Leftrightarrow Arg\frac{z''}{z'} \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi-\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\pi-\theta = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $\theta \in [-\pi,\pi[$

Conclusion : $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{3}}$

Exercice n° 19 $\theta \in]0;\pi[$

(E) : $z^3+4z^2+\left(5-e^{2i\theta}\right)z-4i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$

● a) On sait que : $2i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

Donc : $1+2i\sin\theta e^{i\theta} = 1+(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{i\theta}$

$= 1+e^{2i\theta}-\underbrace{e^{-i\theta}e^{i\theta}}_{=1}$

$\Longrightarrow 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

$\Longrightarrow e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1+2i\sin\theta e^{i\theta}$

b)

$*(-2)^3+4(-2)^2+(5-e^{2i\theta})(-2)-4i\sin\theta e^{i\theta}$

$= -8+16-10+2e^{2i\theta}-4i\sin\theta\, e^{i\theta}$

$= -2+2e^{2i\theta}-2(2i\sin\theta)e^{i\theta} = A$

Or d'après 1) a) : $2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}-1$

Donc : $A = -2+2e^{2i\theta}-2(e^{2i\theta}-1)$

$= -2+2e^{2i\theta}-2e^{2i\theta}+2 = 0$

D'où (– 2) est une solution de (E)

* résolution de l'équation (E) :

(E) est équivalente à l'équation $(z+2)\left[z^2+az+b\right]=0$

$\Leftrightarrow z^3+(a+2)z^2+(b+2a)z+2b = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = 4 \\ b+2a = 5-e^{2i\theta} \\ 2b = -4i\sin\theta e^{i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = -2i\sin\theta e^{i\theta} \end{matrix}$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z+2)(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}) = 0$

$\Leftrightarrow$

$(z+2) = 0$ Où $(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

$\Delta' = 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2 \Longrightarrow \delta = e^{i\theta}$

D'ou $z_1 = -1+e^{i\theta}$, $z_2 = -1-e^{i\theta}$

$\Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{-2,-1+e^{i\theta},-1-e^{i\theta}\right\}$

● a)

$* z_1 = -1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\boxed{z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

$$* \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+e^{i\theta}}{-1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})}{-e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$, or $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc $tg\frac{\theta}{2} > 0$ et par suite : $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = tg\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

b) On a $\frac{z_1+z_2}{2} = -1 = z_I$

Conclusion $\forall\ \theta \in]0,\pi[$, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point I avec $z_I = -1$

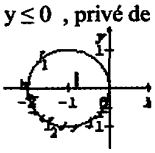
c) Ensemble Γ_1 des points M_1 :

On a : $z_1 = -1+e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - (-1) = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow IM_1 = 1$ et $\theta \in]0, \pi[$

Donc l'ensemble Γ_1 des points M_1 est le demi – cercle de centre I et de rayon 1 privé de A et O situés dans le demi plan $y \geq 0$

Puisque $S_I(M_1) = M_2$,on en déduit que Γ_2 est le demi cercle de centre I et de rayon 1 situés dans le demi plan $y \leq 0$, privé de A et O



d) I milieu du segment $[M_1M_2]$ et I est le milieu du segment [OA] car : $\frac{z_A+z_O}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 = z_I$

Donc $[M_1M_2]$ et [OA] ont même milieu ce qui prouve que le quadrilatère OM_1AM_2 est un <u>parallélogramme</u> (1)

Aussi on a : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})} = \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$ imaginaire pur donc $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ (2)

(1) + (2) donne : OM_1AM_2 est un rectangle

- Pour que OM_1AM_2 soit un carré il suffit que :

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$, or $tg\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $\left|tg\frac{\theta}{2}\right| = tg\frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, comme $\theta \in]0, \pi[$

Alors pour $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$: OM_1AM_2 est un carré

<u>Exercice n° 20</u> $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

● a)

- $z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $z_1 = = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$\boxed{|z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2} \text{ et } Arg(z_1) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

- $z_2 = 1 - e^{3i\theta} = e^{i\frac{3\theta}{2}}(e^{-i\frac{3\theta}{2}} - e^{i\frac{3\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{3\theta}{2}e^{i\frac{3\theta}{2}}$

Comme $\frac{3\theta}{2} \in]0, \frac{3\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{3\theta}{2} > 0$

D'où $z_2 = = 2\sin\frac{3\theta}{2}e^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$\boxed{|z_2| = 2\sin\frac{3\theta}{2} \text{ et } Arg(z_2) \equiv \frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

b) On a : $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$

Posons $a = 1$ et $b = e^{i\theta}$ donc $a^3 = 1$ et $b^3 = e^{3i\theta}$

D'où : $\frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow |z_3| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \Leftrightarrow |z_3| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$

$\Rightarrow |z_3| = \frac{\not{2}\sin\frac{3\theta}{2}}{\not{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

Aussi on a : $Arg(z_3) \equiv Arg(z_2) - Arg(z_1)[2\pi]$

$\equiv (\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) - (\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})[2\pi]$

$\equiv \theta[2\pi]$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{Arg(z_3) \equiv \theta[2\pi] \text{ et } |z_3| = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$

● $(E_\theta) : z^2 - (2 + e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$

$\Delta = (2 + e^{2i\theta})^2 - 4(1 - e^{3i\theta})$

$= 4 + 4e^{2i\theta} + e^{4i\theta} - 4 + 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(4 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(2 + e^{i\theta})^2$

$= [e^{i\theta}(2 + e^{i\theta})]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(2 + e^{i\theta}) = 2e^{i\theta} + 2e^{2i\theta}$

D'où

$z' = \frac{2 + e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = z_3$

$$\Longrightarrow \boxed{z' = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\theta}}$$

$$z'' = \frac{2+e^{2i\theta}-2e^{i\theta}-e^{2i\theta}}{2} = 1-e^{i\theta} = z_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{z'' = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}}$$

Exercice n° 21 $\alpha \in]0;\pi[$

$$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$$

● a) $P(1) = 1 - (1-2\sin\alpha) + 1 - 2\sin\alpha - 1$
$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$

b) On a P (1) = 0 donc

w = 1 est une racine de P (z) = 0

D'où $P(z) = (z-1)(a.z^2 + b.z + c)$
$= a.z^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Par identification membre à membre on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 + 2\sin\alpha \Rightarrow b = 2\sin\alpha \\ c - b = 1 - 2\sin\alpha \\ -c = -1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Donc $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2\sin\alpha.z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ z − 1 = 0 ou $z^2 + 2\sin\alpha.z + 1 = 0$

On va résoudre $z^2 + 2\sin\alpha.z + 1 = 0$ en effet :

$\Delta' = \sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha = (i\cos\alpha)^2$ Donc $\delta' = i\cos\alpha$

Par suite $z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z'' = -\sin\alpha - i\cos\alpha = \overline{z'}$

Donc : P (z) = 0 $\Leftrightarrow$ z = 1 = w, z = z' et z = z''

$$S_{\mathbb{C}} = \{1, -\sin\alpha + i\cos\alpha, -\sin\alpha - i\cos\alpha\}$$

- $w = 1 = e^{i0}$

$z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$z'' = \overline{z'} = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

● $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u_k = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\}$

$\Leftrightarrow u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$, $u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$ et $u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

● $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

● Posons Z = (z − 1)³ donc l'équation :
$(z-1)^6 + 2\sin\alpha(z-1)^3 + 1 = 0$ est équivalente à

$$\begin{cases} Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0 \\ Z = (z-1)^3 \end{cases}$$

Or les solutions de l'équation $Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0$
sont d'après 1) b) Z' = $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, Z'' = $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

par suite on aura :

$(z-1)^3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ ou $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

D'après 2) on trouve :

$* z_0 - 1 = u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})} \Rightarrow z_0 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12})}}$$

$* z_1 - 1 = u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})} \Rightarrow z_1 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12})}}$$

$* z_2 - 1 = u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow z_2 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4})}}$$

On a : $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \overline{(u^3)} = \overline{u}^{-3} = \overline{e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}} = e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

Donc si u_k est une racine cubique de $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ alors $\overline{u_k}$
est une racine cubique de $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

D'où l'équation $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ donne
$z_3 = \overline{z_0}$, $z_4 = \overline{z_1}$ et $z_5 = \overline{z_2}$

Conclusion :

$$S_{\mathbb{C}} = \{z_0, z_1, z_2, \overline{z_0}, \overline{z_1}, \overline{z_2}\}$$

Exercice n° 22 $z^2-(1+i)z+i=0$

On a : $a+b+c=0$ donc $z'=1$ et $z''=\frac{c}{a}=i$

$S_C=\{1\ ;i\}$

$E_\theta : z^2-(2e^{i\theta}\cos\theta)z+e^{2i\theta}=0$

a) Remplaçant z par 1 dans l'équation (E_θ):

$1-2e^{i\theta}\cos\theta+e^{2i\theta}=1-2e^{i\theta}(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})+e^{2i\theta}$

$=1-\underbrace{e^{i\theta}.e^{i\theta}}_{e^{2i\theta}}-\underbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}_{1}+e^{2i\theta}=0$

D'où 1 est une racine de (E_θ)

b) On sait que si z' et z" sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $z'.z''=\frac{c}{a}$

Donc : $1x.z''=\frac{e^{2i\theta}}{1}\Longrightarrow \boxed{z''=e^{2i\theta}}$

a) $z_B=e^{2i\theta}\Leftrightarrow |z_B|=|e^{2i\theta}|=1$ et $2\theta\in\ ]0,\pi[$

Donc OB = 1 par suite l'ensemble des points B est le demi Cercle trigonométrique privé des points A et $S_O(A)$ situés dans le demi plan $y\geq 0$

b) OACB est un losange si et seulement si OACB est un parallélogramme car OA = OB

On aura dans ce cas : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow z_A=z_C-z_B$

$\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B\Leftrightarrow \boxed{z_C=1+e^{2i\theta}}$

c) l'aire du losange OACB est égal à $\mathcal{A}=\frac{OC.AB}{2}$

Donc $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow OC.AB=1\Leftrightarrow |z_C|.|z_B-z_C|=1$

$\Leftrightarrow |(1+e^{2i\theta}).(e^{2i\theta}-1)|=|e^{4i\theta}-1|=1$

$\Leftrightarrow |e^{2i\theta}.(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})|=|e^{2i\theta}|.|2i\sin 2\theta|=1$

$\Leftrightarrow |2\sin 2\theta|=1$ et $2\theta\in\ ]0,\pi[$

Donc $2\sin 2\theta=1\Leftrightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow$

$\theta=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ et Comme $\theta\in\ ]0,\frac{\pi}{2}[$ on trouve :

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{12}\text{ ou }\theta=\frac{5\pi}{12}}$$

Exercice n° 23

a) $z^2-2iz-2=0$

$\Delta'=i^2+2=-1+2=1$ Donc $\delta=1$

Par suite $z'=1+i$; $z''=-1+i$ $S_C=\{1+i\ ;-1+i\}$

b) $z'=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$z''=-1+i=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

$\theta\in\ ]0,\pi[$

$(E): z^2-2e^{i\theta}.z+e^{2i\theta}-1=0$

$\Delta'=(e^{i\theta})^2-(e^{2i\theta}-1)=e^{2i\theta}-e^{2i\theta}+1=1$ Donc $\delta=1$

Les solutions donc sont : $z'=1+e^{i\theta}$; $z''=-1+e^{i\theta}$

$$S_{\mathbb{C}}=\{1+e^{i\theta},-1+e^{i\theta}\}$$

or on a : $\cos\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2}\in\ ]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_2=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$z_3=-1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})=2i\sin\frac{\theta}{2}e$

or on a : $\sin\frac{\theta}{2}>0$ car $\frac{\theta}{2}\in\ ]0,\frac{\pi}{2}[$ d'où

$$\boxed{z_3=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

b) On a : $\frac{z_B+z_C}{2}=e^{i\theta}=\frac{z_O+z_A}{2}$ d'où les segments [BC] et [OA] ont même milieu ce qui prouve que OBAC est un parallélogramme

$OA=|z_1|=2$

$BC=|z_C-z_B|=|-1+e^{i\theta}-1-e^{i\theta}|=|-2|=2$

OA = BC donc les diagonales du parallélogramme OBAC sont isométriques d'où c'est un rectangle

c) OBAC est un carré si et seulement si : OB =OC

$\Leftrightarrow |z_B|=|z_C|\Leftrightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\Leftrightarrow tg\frac{\theta}{2}=1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Puisque $\theta\in\ ]0,\pi[$ on trouve $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n° 1

a) $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{2}{3}=\frac{b}{1}$

Donc $a=\frac{8}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$

b) $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}=0 \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -2\alpha-12=0$ et $0+2\beta=0$

$\Leftrightarrow \alpha=-6$ et $\beta=0$

c) $\vec{W}$ et $\vec{W}'$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{-5}{-3}=\frac{\lambda}{2}=\frac{\mu}{1}\Rightarrow\lambda=\frac{10}{3} et \mu=\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{10}{3}$ et $\mu=\frac{5}{3}$

Exercice n° 2

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$=1\times\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=13-0-30=-17\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

b) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$=-6+21-2=13\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

c) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=-2\times\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$=10+3+1=14\neq 0$ Donc $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Exercice n° 3

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

D'où (AB) et (CD) sont non parallèles (1)

- $(AB):\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

- $(CD):\begin{cases} x=-\beta \\ y=0 \\ z=3+2\beta \end{cases}$, $\beta\in\mathbb{R}$

$M\in(AB)\cap(CD)\Leftrightarrow\begin{cases} 1+\alpha=-\beta\ (1) \\ -1-\alpha=0\ (2) \\ 1+\alpha=3+2\beta\ (3) \end{cases}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}$

(1) et (2) donne $\alpha=-1$ et $\beta=0$

Or d'après (3) : $0=3$ impossible

Donc $(AB)\cap(CD)=\varnothing$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ (AB) et (CD) sont non coplanaires

Conclusion : **(AB) et (CD) sont non coplanaires**

Exercice n° 4

a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{-1}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}):\begin{cases} x=1-2\alpha+4\beta \\ y=\alpha-\beta \\ z=2+2\alpha \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

c) On a : $x+z=3+4\beta$ et $2\alpha=z-2$

Donc $4\beta=x+z-3$ et $2\alpha=z-2$
D'ou

$4y=4\alpha-4\beta=2z-4+3-x-z$.

$\Rightarrow x+4y-z+1=0$

Finalement

$P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) : x+4y-z+1=0$

● a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ A(1,0,2)

$$(AD):\begin{cases}x=1+t\\y=3t\\z=2+t\end{cases}\quad \text{avec } t\in\Re$$

b) Remplaçons les coordonnées du point D dans l'équation cartésienne du plan P : on aura :
$2+4\times3-3+1=12\neq0$

Donc $D\notin P$ et par suite la droite (AD) et le plan P sont sécants en A.

Exercice n° 5

● $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ A(1,1,4)

une équation paramétrique du plan P est :

$$P:\begin{cases}x=1-2\alpha+\beta\ (1)\\y=1+3\alpha-\beta\ (2)\\z=4-\alpha-2\beta\ (3)\end{cases}\qquad(\alpha,\beta)\in\Re^2$$

(1)+(2)$\Rightarrow \alpha=x+y-1 \Rightarrow \beta=x-1+2(x+y-1)=3x+2y-3$

(3)$\Rightarrow z=4-(x+y-1)-2(3x+2y-3)=-7x-5y+11$

$\Rightarrow 7x+5y+z-11=0$

Conclusion: **Une équation cartesienne du plan P est :**
$7x+5y+z-11=0$

● $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&-9\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&2\\-2&-9\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}$

$=-14+15-1=0$

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires d'ou ils existent deux réels a et b vérifiant $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$
(On a : $\vec{w}=\vec{u}+4\vec{v}$ (résolution du système))

Exercice n° 6

● a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=2\neq0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignées ; ils déterminent donc un plan P de l'espace ξ

b) une équation cartésienne du plan P est de la forme :
P : ax +by +cz+d=0

A(1 ;-2 ;1)$\in$P$\Rightarrow$ a-2b+c+d=0

B(2;-1;-2)$\in$P$\Rightarrow$ 2a-b-2c+d=0

C(1;0;1)$\in$P$\Rightarrow$a+c+d=0

On obtient ainsi le système (S) suivant:

$$\begin{cases}a-2b+c+d=0\\2a-b-2c+d=0\\a+c+d=0\end{cases}$$

une résolution de ce système donne :
a=4c ; b=-c et d=-5c

Donc une équation cartésienne de P est :

$$\boxed{P:\ 4x-y+z-5=0}$$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur de P signifie que

$4\times(-2)+3\times(-1)+m=0\Leftrightarrow m=11$

● a) $\overrightarrow{U_D}$ vecteur de D

$\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}$, comme $m\neq11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite **D et P sont sécantes en A.**

b) $\overrightarrow{U_D}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}$, $m\neq11$. Donc D et P sont sécantes.

Cherchons le point d'intersection de P et D, en effet :

$$D:\begin{cases}x=-2t\\y=3t\\z=3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$M(x,y,z)\in P\cap D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 3t & (3) \\ 4x - y + z - 5 = 0 & (4) \end{cases}$$

En remplacent (1), (2) , (3) dans (4) on trouve :

$-8t - 3t + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5}{8}$

D'où $P \cap D : \left\{ M\left(\frac{5}{4}, \frac{-15}{8}, \frac{-15}{8}\right) \right\}$

c) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme $m \neq 11$ donc $\overrightarrow{U_D}$ n'est pas un vecteur directeur de P et par la suite D et P sont sécantes en B.

conclusion : **D et P sont sécantes en B.**

Exercice n° 7

a) $\overrightarrow{U_D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D

$\overrightarrow{U_{D'}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D'

b) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{U_D}$ et $\overrightarrow{U_{D'}}$ non colinéaires et par suite les droites D et D' ne sont pas parallèles **(1)**

c) $M(x, y, z) \in D \cap D'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = \alpha - 4 \\ x = 1 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 = 1 - 2\beta \\ y = 3\alpha + 2 = 3 - \beta \\ z = \alpha - 4 = 1 + 2\beta \end{cases} \quad \text{Avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

(1) + (3) donne $-3 = 2$ impossible

Donc le système n'a pas des solutions

d'où $D \cap D' = \varnothing$ **(2)**

Conclusion : D et D' sont non coplanaires.

Exercice n° 8

a) $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -1$. Donc P // P'(strictement//)

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$: P et P' sont sécants

c) $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$ donc P et P' sont sécants.

d) $\frac{0}{1} \neq \frac{2}{-2}$: P et P' sécants

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P'

$2x(-1) - 3x1 + 2x0 = -5 \neq 0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de P **Donc P et P' sont sécants**

f) Déterminons une équation cartésienne de P et de P'

- pour le plan P.

$x + y = 3 - 2p \Rightarrow 2p = 3 - x - y$

$x - y = 2m - 1 \Rightarrow 2m = x - y + 1$

On a :

$2z = -2 + 2m - 2 \times 2p = -2 + (x - y + 1) - 2.(3 - x - y)$

Donc $\boxed{P : 3x + y - 2z - 7 = 0}$

Pour le plan P'

$x + y = 3 + 4s \Rightarrow 4s = x + y - 3$

$y - x = 7 + 4t \Rightarrow 4t = y - x - 7$

D'où

$2z = 8 - 4t + 2 \times 4s = 8 - y + x + 2x + 2y - 6$

$= 9 + y + 3x$

Donc

$\boxed{P' : 3x + y - 2z + 9 = 0}$

Par suite $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2}$ d'où P // P'

Exercice n° 9

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ A(1 ;0 ;2)

Donc

$$(ABC) : \begin{cases} x = 1 - 2\alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 2 - \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \Re^2$$

b) Cherchons une équation cartésienne de (ABC)

On a : $x + y = 1 - 2\alpha - \beta + 2\alpha + \beta = 1$

Donc : $(ABC) : x + y - 1 = 0$

$P // (ABC) \Leftrightarrow P : x + y + d = 0$

Comme $I(0, 2, -3) \in P$ on aura $d = -2$

Donc $P : x + y - 2 = 0$

Exercice n° 10

a)

$$M(x,y,z) \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = \alpha - 4 \\ x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Remplacent les expressions de x, y et z en fonction de α dans l'équation du P.

On aura :

$-\alpha + 1 + 3\alpha + 2 + \alpha - 4 + 4 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow x = 2$; $y = -1$ et $z = -5$

Donc $P \cap D = \{M(2, -1, -5)\}$

b) Equations paramétriques de D :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 3 \\ y = 2\alpha - 1 \\ z = 3\alpha - 2 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \Re$$

Remplacent x, y et z en fonction de α dans l'équation cartésienne de P. On aura :

$2\alpha + 3 - 2\alpha + 1 + 3\alpha - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

donc $P \cap D = \{M(3, -1, -2)\}$

c) Cherchons une équation cartésienne de P

En effet on a :

$y + 4z = 8 + 5\alpha \Rightarrow 5\alpha = y + 4z - 8$

$z - y = 2 + 5\beta \Rightarrow 5\beta = z - y - 2$

Donc $5x = 15 + 2.5\alpha + 3.5\beta$

$= 15 + 2y + 8z - 16 + 3z - 3y - 6$

$= -7 - y + 11z$

Donc (P) : $5x + y - 11z + 7 = 0$

Maintenant remplacent x, y et z de l'équation paramétrique de D dans l'équation cartésienne de P.

On aura : $5(\alpha + 1) - 2\alpha - 11(-\alpha + 1) + 7 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha + 5 - 2\alpha + 11\alpha - 11 + 7 = 01 \Rightarrow 4\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{14}$

$P \cap D : \{M(\frac{13}{14}, \frac{1}{7}, \frac{15}{14})\}$

d) Déterminant une représentation paramétrique de D

On posera $z = \alpha$, $\alpha \in \Re$

$$D : \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow 2x - z + 1 = 0$

$(1) - (2) \Rightarrow 2y - 5z + 3 = 0$

D'où $x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$ et $y = \frac{5}{2}z - \frac{3}{2}$

$$D : \begin{cases} x = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$$

Remplacent par la suite x, y et z dans l'équation de P, on aura

$\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2} + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow -\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

D'où $P \cap D = \{M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 2)\}$

Exercice n° 11

- $P : 2x - y + z - 3 = 0$
  $Q : x + 2y + z - 1 = 0$

On a : $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$

Donc P et Q sont sécants suivant la droite D avec :

$$D : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- $P : 2x - y + z - 3 = 0$
  $R : 3x + y - z + 2 = 0$

$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ P et R sont sécants suivant la droite

$$\Delta : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- $R : 3x + y - z + 2 = 0$
  $Q : x + 2y + z - 1 = 0$

$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$ Donc R et q sont sécants suivant la droite

$$\Delta' \begin{cases} 3x + y - z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

● $M(x, y, z) \in P \cap Q \cap R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \quad (1) \\ 3x + y - z + 2 = 0 \quad (2) \\ \qquad\qquad\quad (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) \Rightarrow 3z - 6 = 0 \Rightarrow z = 2$

$(1) + (3) \Rightarrow 5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Dans (1) on a : $y = 2x + z - 3 = \frac{2}{5} + 2 - 3 = \frac{-3}{5}$

Finalement :

$$P \cap Q \cap R = \{M(\tfrac{1}{5}, \tfrac{-3}{5}, 2)\}$$